УДК 517.935.2+519.71

В. М. Марченко, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики (БГТУ);
О. Н. Пыжкова, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДИСКРЕТНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ*

Анализируются линейные гибридные дискретно-непрерывные системы с точки зрения их относительной управляемости и достижимости. Для таких систем рассматриваемые задачи управляемости и достижимости сводятся к соответствующим проблемам для специальных дискретных систем, что позволяет получить ранговые критерии разрешимости этих задач.

Linear hybrid discrete-continuous systems are studied from the point of view of relative controllability and assignability property. For such systems, we reduce the problems under investigation to the corresponding ones for a special discrete and, as a result, we obtain the controllability and assignability criteria in a rank matrix form.

Введение. Математическое моделирование и исследование реальных физических процессов в современных задачах автоматики и телемеханики, теории передачи информации, радиологии и химической кинетики, моделирования технологических процессов в ядерных реакторах, плазме и лазерах, задачах демографии и экономики и т. д. предъявляют все более возрастающие требования к математическим моделям реальных систем автоматического регулирования. Все вышеперечисленное, а также прогресс средств вычислительной техники, широкое распространение микропроцессоров в производстве диктуют необходимость изучения фундаментальных проблем математической теории управления, ставят новые задачи для более широкого класса динамических систем. Кроме того, появляется потребность в разработке новых более эффективных методов изучения таких систем, в частности динамических систем с алгебраическими связями и дискретно-непрерывных систем, описывающих процессы, в которых как эффектом дискретности, так и алгебраическими связями пренебречь нельзя. Особый класс составляют динамические аналого-цифровые системы, моделирующие динамические процессы, рассматриваемые на дискретных слоях. Большинство из перечисленных процессов приводят к математическим моделям в виде сингулярных (вырожденных, неразрешенных относительно производной и т. д.), в частности, гибридных систем: дифференциально-алгебраических, с присутствием импульсных и логических переменных, дифференциально-разностных, дискретно-непрерывных и др. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен (см. работу [1] и ссылки к ней).

Ниже рассматриваются гибридные дискретно-непрерывные системы, в которые управление входит только в дискретную составляющую, что в совокупности можно квалифицировать как непрерывные системы, управляемые дискретным регулятором. Такие системы [2] могут оказаться полезными и при исследовании различных квантованных [3] динамических систем, а также систем с импульсными воздействиями [4, 5]. Работа в целом продолжает начатое в [1] исследование основных проблем качественной теории управления в дискретно-непрерывных системах.

Вопросы управляемости и наблюдаемости гибридных дифференциально-разностных систем рассматривались ранее в [6–8].

1. Постановка задачи. Рассмотрим объект управления, описываемый следующей дискретно-непрерывной системой:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), t \in [kh,(k+1)h), \quad (1)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(kh) \in \mathbb{R}^m$, $u(kh) \in \mathbb{R}^r, h > 0$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Начальные условия для системы (1), (2) зададим в виде

$$x(0) = x(+0) = x_0, \ y(0) = y_0. \quad (3)$$

Определение. При заданном моменте времени $t_1 = qh, q \in \mathbb{N}$, система (1), (2) называется:

а) t_1-относительно управляемой, если для любых начальных данных $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh) \in \mathbb{R}^r, k = 0, 1, \ldots, q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t), t \geq 0$, $y(kh), k = 0, 1, \ldots,$ системы (1), (2) с начальными

*Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом (S/WI/2/2011).

условиями (3) обладает свойством $x(t_1)=0$, $y(t_1)=0$;

б) t_1-относительно управляемой по x, если для любых начальных данных $x_0\in\mathbb{R}^n$, $y_0\in\mathbb{R}^m$ в (3) найдется такое управление $u(kh)\in\mathbb{R}^r$, $k=0,1,...,q-1$, что соответствующее решение $x(t), t\ge 0$, $y(kh), k=0,1,...$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1)=0$;

в) t_1-относительно управляемой по y, если для любых начальных данных $x_0\in\mathbb{R}^n$, $y_0\in\mathbb{R}^m$ в (3) найдется такое управление $u(kh)\in\mathbb{R}^r$, $k=0,1,...,q-1$, что соответствующее решение $x(t), t\ge 0$, $y(kh), k=0,1,...$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $y(t_1)=0$;

г) t_1-относительно достижимой, если для любых векторов $x_0, x_1\in\mathbb{R}^n$; $y_0, y_1\in\mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh)\in\mathbb{R}^r$, $k=0,1,...,q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t)$, $t\ge 0$, $y(kh), k=0,1,...$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1)=x_1$, $y(t_1)=y_1$;

д) t_1-относительно достижимой по x, если для любых векторов $x_0, x_1\in\mathbb{R}^n$; $y_0\in\mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh)\in\mathbb{R}^r$, $k=0,1,...,q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t)$, $t\ge 0$, $y(kh), k=0,1,...$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $x(t_1)=x_1$;

е) t_1-относительно достижимой по y, если для любых векторов $x_0\in\mathbb{R}^n$; $y_0, y_1\in\mathbb{R}^m$ в (3) найдется управление $u(kh)\in\mathbb{R}^r$, $k=0,1,...,q-1$, такое, что соответствующее решение $x(t)$, $t\ge 0$, $y(kh), k=0,1,...$, системы (1), (2) с начальными условиями (3) обладает свойством $y(t_1)=y_1$.

Задача. Найти параметрические критерии относительной t_1-управляемости и достижимости системы (1), (2).

2. Относительная управляемость. Применяя формулу Коши к системе (1), для решения $x(kh+h), k=0,1,...$, получаем представление

$$x(kh+h)=e^{A_{11}(kh+h-kh)}x(kh)+$$
$$+\int_{kh}^{kh+h} e^{A_{11}(kh+h-\tau)}A_{12}y(kh)d\tau=e^{A_{11}h}x(kh)+$$
$$+\int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau A_{12}y(kh). \qquad (4)$$

Учитывая (2) и вводя обозначения

$$z[k]=\begin{bmatrix} x(kh)\\ y(kh)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ B\end{bmatrix}=\Delta,$$

$$\Sigma_h=\begin{bmatrix} e^{A_{11}h} & \int_0^h e^{A_{11}(h-\tau)}d\tau\, A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},$$

для описания $z[k]$ получаем дискретную систему вида

$$z[k+1]=\Sigma_h\, z[k]+\Delta u(kh), k=0,1,... \qquad (5)$$

Отсюда нетрудно видеть, что задача относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2) сводится к задаче полной управляемости (в смысле Калмана [9]) дискретной системы (5).

Из (5) с учетом начальных условий (3) получаем

$$z[q]=\Sigma_h\, z[q-1]+\Delta u((q-1)h)=$$
$$=(\Sigma_h)^{q-1}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}+(\Sigma_h)^{q-1}\Delta u(0)+(\Sigma_h)^{q-2}\Delta u(h)+$$
$$+...+\Delta u((q-1)h),\ q=1,2,... \qquad (6)$$

По аналогии с развитой для линейных динамических систем техникой [9] получения критериев полной управляемости, в частности, используя представление (6), приходим к следующему условию qh-относительной управляемости дискретно-непрерывной системы (1), (2).

Теорема 1. Условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^{q-1}]=$$
$$=rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta] \qquad (7)$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости системы (1), (2).

Действительно, анализируя представление (6), нетрудно заключить, что система (1), (2) qh-относительно управляема тогда и только тогда, когда линейная оболочка столбцов матрицы Σ_h содержится в линейной оболочке столбцов матриц $\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta$, что в свою очередь равносильно ранговому условию (7). На этом доказательство теоремы 1 завершается.

В качестве следствия теоремы 1 имеем теорему 2.

Теорема 2. Условие

$$rank\,(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^{q-1}])=$$
$$=rank\,(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta]) \qquad (8)$$

является необходимым и достаточным:

а) для gh-относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H=[I_n \quad 0]$;

б) для gh-относительной управляемости по y системы (1), (2) при $H=[0 \quad I_m]$, где символ I_k обозначает единичную $k\times k$-матрицу.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что свойство qh-относительной управляемости со временем «насыщается». Оказывается, если система (1), (2) не является qh-относительно управляемой при $q=n+m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q>n+m$.

Замечание 2. Система (1), (2) считается относительно управляемой, если она qh-относительно управляема хотя бы при одном натуральном числе q. Из теоремы 1 вытекает, что необходимый и достаточный критерий относительной управляемости системы (1), (2) заключается в требовании

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n-1}] = \\ = rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta].$$

Аналогично условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta, (\Sigma_h)^{m+n-1}]) = \\ = rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{m+n-1}\Delta])$$

является необходимым и достаточным для относительной управляемости по x системы (1), (2) при $H = [I_n \quad 0]$ и для относительной управляемости по y при $H = [0 \quad I_m]$.

3. Относительная достижимость. Применяя стандартную технику [9] получения ранговых критериев разрешимости задачи достижимости в линейных стационарных системах, получаем следующие условия t_1-относительной достижимости системы (1), (2).

Теорема 3. Условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta] = n + m \qquad (9)$$

является необходимым и достаточным для qh-относительной управляемости системы (1), (2).

Теорема 4. Условие

$$rank(H[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{q-1}\Delta, (\Sigma_h)^{q-1}]) = \\ = rank\, H \qquad (10)$$

является необходимым и достаточным:

а) для qh-относительной достижимости по x системы (1), (2) при $H = [I_n \quad 0]$;

б) для qh-относительной достижимости по y системы (1), (2) при $H = [0 \quad I_m]$.

Как и в случае управляемости свойство qh-относительной достижимости со временем «насыщается»: если система (1), (2) не является qh-относительно достижимой при $q = n + m$, то она не будет qh-относительно управляемой и при $q > n + m$. Отсюда, вводя понятие относительной достижимости как qh-относительной достижимости хотя бы при одном натуральном числе q, получаем ранговый критерий относительной достижимости: система (1), (2) является относительно достижимой тогда и только тогда, когда выполняется ранговое условие

$$rank[\Delta, \Sigma_h\Delta, ..., (\Sigma_h)^{n+m-1}\Delta] = n + m.$$

По аналогии с замечанием 2 можно сформулировать необходимые и достаточные условия относительной достижимости системы (1), (2) по x и по y.

Заключение. В работе рассмотрен ряд задач относительной управляемости и достижимости гибридных дискретно-непрерывных динамических систем. Предложенная методика исследования позволила получить эффективные ранговые критерии разрешимости этих задач, а также по аналогии с [6–8] может быть успешно применена к исследованию соответствующих двойственных задач наблюдаемости. Остаются пока не изученными вопросы полной управляемости дискретно-непрерывных систем, когда траекторию требуется не только перевести в нулевое начальное состояние системы, но и «успокоить» в нем, а также вопросы qh-относительной управляемости и достижимости по x в случае произвольного конечного момента времени $t_1 \neq qh, q \in \mathbb{N}$. Однако это предмет другой статьи.

Литература

1. Марченко, В. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем / В. М. Марченко, И. М. Борковская // Труды БГТУ. – 2012. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 7–10.
2. Афанасьев, В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.
3. De la Sen, M. The reachability and observability of hybrid multirate sampling linear systems / M. De la Sen // Computers Math. Applic. – 1996. – Vol. 31, № 1. – P. 109–122.
4. Цыпкин, Я. З. Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. – М: Госиздат. физ.-мат. лит-ры, 1963. – 968 с.
5. Халанай, А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
6. Marchenko, V. M. On the observability of linear differential-algebraic systems with delays / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, № 8. – P. 1387–1392.
7. Марченко, В. М. О полной наблюдаемости гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко // Доклады РАН. – 2011. – Т. 441, № 2. – С. 179–182.
8. Марченко, В. М. Полная наблюдаемость гибридных дифференциально-разностных систем / В. М. Марченко // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 11. – С. 1608–1620.
9. Габасов, Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М.: Наука, 1971. – 508 с.

Поступила 01.03.2012